模块二 三角恒等变换

第 1 节 和差角、辅助角、二倍角公式（★★☆）

强化训练

1．（2023·江苏南京模拟·★）已知 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha\sin 2\alpha=$（　　）

（A）$\frac{1}{27}$　　（B）$\frac{2}{27}$　　（C）$\frac{8}{27}$　　（D）$\frac{16}{27}$

答案：D

解析：已知 $\cos\alpha$，故将 $\sin 2\alpha$ 用二倍角公式化单倍角，

由题意，$\sin\alpha\sin 2\alpha=\sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin^2\alpha\cos\alpha=2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=2\times[1-(\frac{1}{3})^2]\times\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$.

2．（2022·安徽模拟·★★）若 α 是第二象限的角，且 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$______.

答案：$-\frac{24}{7}$

解析：由题意，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$，又 α 是第二象限的角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

从而 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

3．（2023·新高考Ⅱ卷·★★）已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）

（A）$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　（B）$\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　（C）$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　（D）$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

答案：D

解析：$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$，

接下来开根号，若不会开，可将选项平方，进行对比；

若直接开，则需上下同乘以 2，将分子化为完全平方，

所以 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4^2}$，故 $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

又 α 为锐角，所以 $\frac{\alpha}{2}\in(0,\frac{\pi}{4})$，故 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4．（2023·重庆模拟·★★）$\sin 20^\circ\sin 10^\circ-\cos 20^\circ\sin 80^\circ=$______.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：目标式与和差角公式比较接近，可朝此方向变形，不妨凑成正弦的差角公式，换掉$\sin 10^\circ$即可，

$\sin 20^\circ \sin 10^\circ - \cos 20^\circ \sin 80^\circ = \sin 20^\circ \sin(90^\circ - 80^\circ) - \cos 20^\circ \sin 80^\circ = \sin 20^\circ \cos 80^\circ - \cos 20^\circ \sin 80^\circ$

$= \sin(20^\circ - 80^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5．（2021·全国乙卷·★★）$\cos^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{5\pi}{12} =$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

解法 1：两项都有平方，可降次，且降次后恰好都化为特殊角，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} - \frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：注意到$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$，故用诱导公式将角统一成$\frac{\pi}{12}$，可利用倍角公式求值，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{5\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \cos^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6．（2022·黑龙江模拟·★★）数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都有广泛应用，0.618 就是黄金分割比$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值，黄金分割比还可以表示成$2\sin 18^\circ$，则$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ - 1} =$（　　）

（A）4　　（B）$\sqrt{5}+1$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}-1$

答案：A

解析：由题意，$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ - 1} = \frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4-4\sin^2 18^\circ}}{\cos 54^\circ} = \frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4\cos^2 18}}{\cos 54^\circ} = \frac{8\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$

$= \frac{4\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} = \frac{4\sin(90^\circ - 54^\circ)}{\cos 54^\circ} = \frac{4\cos 54^\circ}{\cos 54^\circ} = 4$.

7．（2022·北京模拟·★★★）若$\cos(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$，则$\beta$可以为______.（写出一个满足条件的$\beta$）

答案：$-\frac{\pi}{4}$（答案不唯一，满足$\beta = k\pi - \frac{\pi}{4}(k \in \mathbf{Z})$的$\beta$均可）

解析：先用诱导公式把$\cos(\pi - \alpha)$化简，$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$，

又$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，所以$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$，故$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$，

我们要写出一个β，可以先计算$\tan\beta$，直接把已知的$\tan(\alpha + \beta)$展开即可，

由题意，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=\dfrac{1}{2}$，解得：$\tan\beta=-1$，所以 $\beta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

8．（2023•江苏常州模拟•★★★）已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{4}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$______.

答案： $\dfrac{1}{5}$

解析： 涉及 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$，不外乎探究角的关系，或全部展开. 经尝试，按前者处理不易，故展开，

由题意，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ ①，

$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-\dfrac{1}{4}$ ②，联立①②解得：$\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{4}{15}\\ \sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{15}\end{cases}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{15}+(-\dfrac{1}{15})=\dfrac{1}{5}$.

9．（2022•江苏常州模拟•★★★）已知 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos1^\circ-\sin1^\circ)$，$b=\dfrac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}$，$c=\sin22^\circ\cos24^\circ+\cos22^\circ\sin24^\circ$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$b>a>c$　（B）$c>b>a$　（C）$c>a>b$　（D）$b>c>a$

答案： B

解析： 观察发现 a，b，c 的式子都可化简，故先化简，

由题意，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos1^\circ-\sin1^\circ)=\sin45^\circ\cos1^\circ-\cos45^\circ\sin1^\circ=\sin(45^\circ-1^\circ)=\sin44^\circ$，

$$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1-\dfrac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}{1+\dfrac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}=\frac{\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ+\sin^2 22.5^\circ}=\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ=\cos45^\circ=\sin45^\circ,$$

$c=\sin22^\circ\cos24^\circ+\cos22^\circ\sin24^\circ=\sin(22^\circ+24^\circ)=\sin46^\circ$，

因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上↗，所以 $\sin46^\circ>\sin45^\circ>\sin44^\circ$，故 $c>b>a$.

10.（★★★）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$______.

答案： $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析： 先用辅助角公式，将 $f(x)$ 合并，求出其最大值，$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{5}$，

由题意，$f(\theta)=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{5}$，所以 $\sin(\theta+\varphi)=1$，要求 $\cos\theta$，可先由此式将 θ 求出来，

从而 $\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\cos\theta=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$，

由辅助角公式，$\sin\varphi = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.